國立彰化女子高級中學 115 學年度第一次教師甄選 數學科試題

一、填充題：(每題 4 分，共計 60 分)

1.空間中有三向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$滿足$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{2}$、$\left|\overrightarrow{OB}\right|=2$、$\left|\overrightarrow{OC}\right|=3$，且$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$夾角為$90°$、$\overrightarrow{OB}$與$\overrightarrow{OC}$夾角為$120°$、$\overrightarrow{OC}$與$\overrightarrow{OA}$夾角為$135°$，求以三向量$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}$所張出平行六面體的頂點中，與 O 點的距離最大值為________。

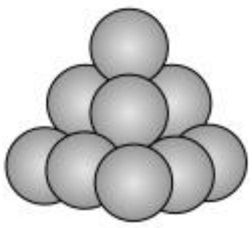
2.在邊長為 6 的正方形 ABCD 內有兩點 P、Q，滿足$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{QA}=\overline{QB}$，求$\overline{PQ}$為_____時，$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PQ}+\overline{QA}+\overline{QB}$有最小值。

3.設符號$[x]$表示不大於 x 的最大整數，例如：$[\pi]=3$、$[2]=2$，求$\sum_{k=1}^{2025}\left[\frac{k^3}{2026}\right]$的末兩位數字為______。

4.已知 Γ: $15x^2-2\sqrt{3}xy+13y^2=144$ 是一個橢圓，則此橢圓的正焦弦長為___________。

5.有一遊戲規則如下：參賽者每獲勝一次時就新增多玩二次的機會，失敗則無法新增。若小花每次獲勝之機率為$\frac{2}{3}$，失敗的機率為$\frac{1}{3}$，則小花玩此遊戲時，恰可玩 9 次之機率為____________。(化為最簡分數)

6.如下圖有 10 個半徑均為 1 的球體，組成一三角堆垛，求能包含此堆垛的長方體中最小體積為________。(不計球體、長方體厚度，長方體可在空間中轉動)



7、連續擲一個骰子，將前 n 次擲出的點數依次寫在小數點的後面，得到實數 a_n。例如：擲出的點數依序為 5，2，6，…，則 $a_1=0.5$，$a_2=0.52$，$a_3=0.526$，…。令 $p_n(\alpha)$ 為 $a_n\le\alpha$ 的機率，$\alpha\in R$。試求出 α 的範圍，使得 $\lim_{n\to\infty}p_n(\alpha)=\frac{1}{2}$。

8、 $f(x)$ 滿足 $x^2f(x)=\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{2}ax^4-\frac{1}{3}x^3+2\int_0^x tf(t)dt$，$f(0)=0$。若 x 軸與 $y=f(x)$ 所圍成的區域面積為 $S(a)$，求 $S(a)$ 的最小值______。

9、 $x^2-12y^2=1$ 有一組自然數解 $(7,2)$，請找出任一組非 $(7,2)$ 的自然數解為________。

10、擲兩枚骰子點數和記為 N，將 N 表示成 $N=8a+4b+2c+d$，其中 a，b，c，$d\in\{0,1\}$，將 a，b，c，d 中取值為 1 的個數記為 X，求 X 的期望值為________。

11、設$a\in\mathrm{R}$，若曲線$y=X^{2026}+(X+1)^{2025}-2$在$(0,-1)$處的切線亦為$y=\ln x+a$的切線，求$e^a$的值

12、三角形ABC中，$\angle A,\ \angle B,\ \angle C$的對應邊長分別為$a,\ b,\ c$，已知 $6\sin A=4\sin B=3\sin C$，且其內切圓面積為 $\frac{25}{8}$，求其外接圓面積_____ 。

13、將A B C D E F 這 6 個大寫字母依此順序順時針排成一個環狀，再將 abcdef 這 6 個小寫字母放入此環狀中，並要求大小寫字母相間，而Aa, Bb, Cc, Dd 這4組字母的大小寫不得相鄰，共有____種可能的放入方式？

14、 已知 $\sin\alpha + 3\sin\beta = 3$，求$\cos(\alpha + \beta)$的最大值 ___

15、已知二次函數 $f(x)$ 的圖形通過原點，且對於任意實數 t 都有 $f(4+t)=f(2-t)$，若 $f(x-108)$ 的最大值為 12，則 $f(x)=$____________

二、計算證明題：(每題 7 分)

1.彰化女中高二有兩個二類組班級，第一次期中考的數 A 科目成績表現如下:
201 班有 n_1 個學生，算術平均數為 μ_1 分，標準差為 σ_1 分；202 班有 n_2 個學生，算術平均數為 μ_2 分，標準差為 σ_2 分。
若這兩班 n_1+n_2 個學生這次期中考數 A 科目的算術平均數為 μ_{mix} 分，標準差為 σ_{mix} 分：

請證明：$\sigma_{mix} \geq \sqrt{\dfrac{n_1\cdot\sigma_1^{\,2}+n_2\cdot\sigma_2^{\,2}}{n_1+n_2}}$ (5 分)，並說明等號成立的條件(2 分)。

2.數學老師在數學課時，請同學上台解下列題目：「已知空間坐標系中有 $\mathrm{A}(3\sqrt{5},4,-3)$ 、$\mathrm{B}(2,3,1)$ 兩點，動點 P 在 x 軸上，動點 Q 在 y 軸上，求 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$ 的最小值？」。

某位同學的解題想法如下：「將 A 點轉換成 xy 平面上的點 $\mathrm{A'}(3\sqrt{5},5,0)$ ，B 點轉換成 xy 平面上的點 $\mathrm{B'}(\sqrt{5},3,0)$ ，再使用二維空間的算法：即為『坐標平面上有 $\mathrm{A''}(3\sqrt{5},5)$ 、$\mathrm{B''}(\sqrt{5},3)$ 、x 軸上動點 P’、y 軸上動點 Q’，求 $\overline{\mathrm{A''P'}}+\overline{\mathrm{P'Q'}}+\overline{\mathrm{Q'B''}}$ 的最小值？』。

請說明該位同學解題想法在空間中的幾何意義及可以這樣作的原因，並求出原題目的最小值及 P、Q 座標。

3.$\triangle ABC$ 中，O 為外心、G 為重心，$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ ：
(1)證明：H 為$\triangle ABC$ 的垂心。
(2)證明：$\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{OG}$(即尤拉線性質)。
(3)作$\triangle A'B'C'$使 A、B、C 分別為$\overline{B'C'}$ 、$\overline{A'C'}$ 、$\overline{A'B'}$ 中點，證明：H 為$\triangle A'B'C'$的外心，並說明$\triangle A'B'C'$的垂心所在位置。

4、請判斷下列敘述：兩個任意週期函數相加亦為週期函數。
如果敘述正確，請證明之。如果敘述錯誤，請舉一個反例，亦請證明之。

5、 $f(x)$ 是 x 的實係數的三次多項式，最高次項的係數為 1。方程式 $f(x)=0$ 有三個相異的根α ，β ，γ ，同時α^2 ，β^2 ，γ^2 也是 $f(x)=0$ 的三個相異根。請求出所有符合上述條件的多項式 $f(x)$

6、設$a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$，滿足 $a+2b+c+2d=1,\ a^2+2b^2+c^2+2d^2=2$，求 $a+b$的最大值。

國立彰化女子高級中學 115 學年度第一次教師甄選 數學科答案卷

一、填充題：(每題 4 分，共計 60 分)

1. $3\sqrt{2}$	2. 送分 $\cancel{6-2\sqrt{3}}$	3 50	4. $\cancel{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ $3\sqrt{3}$	5. $\frac{224}{19683}$
6 $56+40\sqrt{2}$	7. $\frac{11}{30}\le\alpha\le\frac{37}{90}$	8 1/2	9. (97,28)	10. $\frac{71}{36}$
11. 2025	12. 32	13 154	14. 1/6	15. $-\frac{4}{3}(x-3)^2+12$