

# 國立彰化女子高級中學 115 學年度第一次教師甄選 數學科試題

## 一、填充題：(每題 4 分，共計 60 分)

1. 空間中有三向量  $\vec{OA}$ 、 $\vec{OB}$ 、 $\vec{OC}$  滿足  $|\vec{OA}| = \sqrt{2}$ 、 $|\vec{OB}| = 2$ 、 $|\vec{OC}| = 3$ ，且  $\vec{OA}$  與  $\vec{OB}$  夾角為  $90^\circ$ 、 $\vec{OB}$  與  $\vec{OC}$  夾角為  $120^\circ$ 、 $\vec{OC}$  與  $\vec{OA}$  夾角為  $135^\circ$ ，求以三向量  $\vec{OA} + \vec{OB}$ 、 $\vec{OB} + \vec{OC}$ 、 $\vec{OC} + \vec{OA}$  所張出平行六面體的頂點中，與  $O$  點的距離最大值為\_\_\_\_\_。

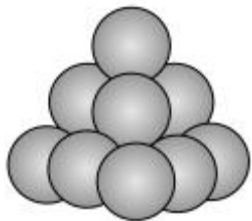
2. 在邊長為 6 的正方形 ABCD 內有兩點 P、Q，滿足  $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{QA} = \overline{QB}$ ，求  $\overline{PQ}$  為\_\_\_\_\_時， $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PQ} + \overline{QA} + \overline{QB}$  有最小值。

3. 設符號  $[x]$  表示不大於  $x$  的最大整數，例如： $[\pi] = 3$ 、 $[2] = 2$ ，求  $\sum_{k=1}^{2025} \left[ \frac{k^3}{2026} \right]$  的末兩位數字為\_\_\_\_\_。

4. 已知  $\Gamma: 15x^2 - 2\sqrt{3}xy + 13y^2 = 144$  是一個橢圓，則此橢圓的正焦弦長為\_\_\_\_\_。

5. 有一遊戲規則如下：參賽者每獲勝一次時就新增多玩二次的機會，失敗則無法新增。若小花每次獲勝之機率為  $\frac{2}{3}$ ，失敗的機率為  $\frac{1}{3}$ ，則小花玩此遊戲時，恰可玩 9 次之機率為\_\_\_\_\_。(化為最簡分數)

6. 如下圖有 10 個半徑均為 1 的球體，組成一三角堆垛，求能包含此堆垛的長方體中最小體積為\_\_\_\_\_。(不計球體、長方體厚度，長方體可在空間中轉動)



7. 連續擲一個骰子，將前  $n$  次擲出的點數依次寫在小數點的後面，得到實數  $a_n$ 。例如：擲出的點數依序為 5, 2, 6, ..., 則  $a_1 = 0.5$ ， $a_2 = 0.52$ ， $a_3 = 0.526$ ，...。令  $p_n(\alpha)$  為  $a_n \leq \alpha$  的機率， $\alpha \in R$ 。試求出  $\alpha$  的範圍，使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(\alpha) = \frac{1}{2}$ 。

8.  $f(x)$  滿足  $x^2 f(x) = \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{2}ax^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\int_0^x tf(t)dt$ ， $f(0) = 0$ 。若  $x$  軸與  $y = f(x)$  所圍成的區域面積為  $S(a)$ ，求  $S(a)$  的最小值\_\_\_\_\_。

9.  $x^2 - 12y^2 = 1$  有一組自然數解 (7, 2)，請找出一組非 (7, 2) 的自然數解為\_\_\_\_\_。

10. 擲兩枚骰子點數和記為  $N$ ，將  $N$  表示成  $N = 8a + 4b + 2c + d$ ，其中  $a, b, c, d \in \{0, 1\}$ ，將  $a, b, c, d$  中取值為 1 的個數記為  $X$ ，求  $X$  的期望值為\_\_\_\_\_。

11. 設  $a \in R$ ，若曲線  $y = X^{2026} + (X + 1)^{2025} - 2$  在  $(0, -1)$  處的切線亦為  $y = \ln x + a$  的切線，求  $e^a$  的值

12. 三角形 ABC 中， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  的對應邊長分別為  $a, b, c$ ，已知  $6\sin A = 4\sin B = 3\sin C$ ，且其內切圓面積為  $\frac{25}{8}$ ，求其外接圓面積\_\_\_\_\_。

# 國立彰化女子高級中學 115 學年度第一次教師甄選 數學科試題

13、將A B C D E F 這 6 個大寫字母依此順序順時針排成一個環狀，再將 abcdef 這 6 個小寫字母放入此環狀中，並要求大小寫字母相間，而Aa, Bb, Cc, Dd 這4組字母的大小寫不得相鄰，共有\_\_\_\_種可能的放入方式？

14、已知  $\sin \alpha + 3 \sin \beta = 3$ ，求  $\cos(\alpha + \beta)$  的最大值 \_\_\_\_

15、已知二次函數  $f(x)$  的圖形通過原點，且對於任意實數  $t$  都有  $f(4+t) = f(2-t)$ ，若  $f(x-108)$  的最大值為 12，則  $f(x) =$  \_\_\_\_\_

## 二、計算證明題：(每題 7 分)

1.彰化女中高二有兩個二類組班級，第一次期中考的數 A 科目成績表現如下：

201 班有  $n_1$  個學生，算術平均數為  $\mu_1$  分，標準差為  $\sigma_1$  分；202 班有  $n_2$  個學生，算術平均數為  $\mu_2$  分，標準差為  $\sigma_2$  分。若這兩班  $n_1 + n_2$  個學生這次期中考數 A 科目的算術平均數為  $\mu_{mix}$  分，標準差為  $\sigma_{mix}$  分：

請證明： $\sigma_{mix} \geq \sqrt{\frac{n_1 \cdot \sigma_1^2 + n_2 \cdot \sigma_2^2}{n_1 + n_2}}$  (5 分)，並說明等號成立的條件(2 分)。

2.數學老師在數學課時，請同學上台解下列題目：「已知空間坐標系中有  $A(3\sqrt{5}, 4, -3)$ 、 $B(2, 3, 1)$  兩點，動點 P 在  $x$  軸上，動點 Q 在  $y$  軸上，求  $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$  的最小值？」。

某位同學的解題想法如下：「將 A 點轉換成  $xy$  平面上的點  $A'(3\sqrt{5}, 5, 0)$ ，B 點轉換成  $xy$  平面上的點  $B'(\sqrt{5}, 3, 0)$ ，再使用二維空間的算法：即為「坐標平面上有  $A''(3\sqrt{5}, 5)$ 、 $B''(\sqrt{5}, 3)$ 、 $x$  軸上動點 P'、 $y$  軸上動點 Q'，求  $\overline{A''P'} + \overline{P'Q'} + \overline{Q'B''}$  的最小值？」。  
請說明該位同學解題想法在空間中的幾何意義及可以這樣作的原因，並求出原題目的最小值及 P、Q 座標。

3.  $\triangle ABC$  中， $O$  為外心、 $G$  為重心， $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ：

(1)證明： $H$  為  $\triangle ABC$  的垂心。

(2)證明： $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG}$  (即尤拉線性質)。

(3)作  $\triangle A'B'C'$  使  $A'$ 、 $B'$ 、 $C'$  分別為  $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$  中點，證明： $H$  為  $\triangle A'B'C'$  的外心，並說明  $\triangle A'B'C'$  的垂心所在位置。

4、請判斷下列敘述：兩個任意週期函數相加亦為週期函數。

如果敘述正確，請證明之。如果敘述錯誤，請舉一個反例，亦請證明之。

5、 $f(x)$  是  $x$  的實係數的三次多項式，最高次項的係數為 1。方程式  $f(x) = 0$  有三個相異的根  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ ，同時  $\alpha^2$ 、 $\beta^2$ 、 $\gamma^2$  也是  $f(x) = 0$  的三個相異根。請求出所有符合上述條件的多項式  $f(x)$

6、設  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ，滿足  $a + 2b + c + 2d = 1$ ， $a^2 + 2b^2 + c^2 + 2d^2 = 2$ ，求  $a + b$  的最大值。

# 國立彰化女子高級中學 115 學年度第一次教師甄選 數學科答案卷

一、填充題：(每題 4 分，共計 60 分)

1. $3\sqrt{2}$	2. $6-2\sqrt{3}$	3. 50	4. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	5. $\frac{224}{19683}$
6. $56+40\sqrt{2}$	7. $\frac{11}{30} \leq \alpha \leq \frac{37}{90}$	8. $1/2$	9. (97,28)	10. $\frac{71}{36}$
11. 2025	12. 32	13. 154	14. $1/6$	15. $-\frac{4}{3}(x-3)^2+12$