

分科測驗（114 學年度起適用）

數學乙考科參考試卷（卷二）

試題解析

第壹部分、選擇（填）題

試題編號：1

參考答案：(3)

學科內容：N-12 乙-2 無窮等比級數

測驗目標：循環小數與無窮等比級數的概念

試題解析：由 $0.\bar{2} = \frac{2}{9}$ 、 $0.0\bar{4} = \frac{4}{90}$ ，因此數列的公比為 $\frac{\frac{4}{90}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{5}$ ，級數和為 $\frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{18}$ 。

試題編號：2

參考答案：(2)

學科內容：F-12 乙-5 積分

測驗目標：積分的意涵

試題解析： $\int_{-3}^3 \left(\frac{1}{3}x^2 + 1 \right) dx = \left(\frac{1}{9}x^3 + x \right) \Big|_{-3}^3 = 12$ 。

試題編號：3

參考答案：(5)

學科內容：D-11B-2 不確定性（D-11A-2 條件機率、D-11A-3 貝氏定理）

測驗目標：條件機率

試題解析：選項(1)：編號為奇數的球共有 50 顆，故在某甲抽到球的號碼是奇數的條件下，某甲抽到

7 號球的條件機率為 $\frac{1}{50}$ 。

選項(2)：編號為質數的球共有 25 顆，故在某甲抽到球的號碼是質數的條件下，某甲抽到

7 號球的條件機率為 $\frac{1}{25}$ 。

選項(3)：編號為 7 的倍數的球共有 14 顆，故在某甲抽到球的號碼是 7 的倍數的條件下，

某甲抽到 7 號球的條件機率為 $\frac{1}{14}$ 。

選項(4)：編號不是 5 的倍數的球共有 80 顆，故在某甲抽到球的號碼不是 5 的倍數的條件下，某甲抽到 7 號球的條件機率為 $\frac{1}{80}$ 。

選項(5)：編號小於 10 的球共有 9 顆，故在某甲抽到球的號碼小於 10 的條件下，某甲抽到 7 號球的條件機率為 $\frac{1}{9}$ 。

由此可知，機率最大為 $\frac{1}{9}$ 。

試題編號：4

參考答案：(4)

學科內容：D-10-2 數據分析

測驗目標：散布圖與相關係數的關係

試題解析：由試題本所附相關係數公式知：

「若散布圖恰為正斜率直線時，此時相關係數最大（此時相關係數為 1）」，故答案為(4)。

試題編號：5

參考答案：(3)

學科內容：S-11B-1(S-11A-1) 空間概念、G-11B-4(G-11A-2) 空間坐標系

測驗目標：空間概念、空間坐標

試題解析：根據題意，知四角錐 $A-BCDE$ 的底面為在 xz 平面上，邊長為 6 的正方形，且四個側面為全等的等腰三角形，故四角錐頂點到底面的投影點為底面正方形的中心，推得錐頂點 A 的 x 坐標為 3、 z 坐標為 3。由四角錐 $A-BCDE$ 體積 $72 = \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高}$ ，底面積為 $6 \times 6 = 36$ ，可算出高為 $\frac{72 \times 3}{36} = 6$ 。因為錐頂點 A 在第一卦限，故錐頂點 A 的坐標為 (3, 6, 3)。

試題編號：6

參考答案：(5)

學科內容：D-10-3 有系統的計數

測驗目標：有系統的計數

試題解析：根據題意，五天中每一種餐點至少各點一次，故五天中四種餐點必有一種會點兩次，假設五天中點兩次牛肉麵，可能情形為星期一、三；星期一、四；星期一、五；星期二、四；星期二、五；星期三、五點牛肉麵。

以上共 $6 \times 3! = 36$ 種方法，則四種餐點共有 $36 \times 4 = 144$ 種方法。

試題編號：7

參考答案：(3)(5)

學科內容：N-10-3 指數、N-10-4 常用對數、

F-11B-2 按比例成長模型（A-11A-4 對數律、F-11A-4 指數與對數函數）

測驗目標：指數、常用對數的意義、對數律、換底公式

試題解析：根據題意，可推得 $a=10^{1.1}$ 、 $b=10^{2.2}$ 、 $c=10^{3.3}$ 。

選項(1)： $a+c=10^{1.1}+10^{3.3}=10^{1.1}(1+10^{2.2})>2\times 10^{2.2}=2b$ 。

選項(2)： $a=10^{1.1}>10^1=10$ 。

選項(3)：由 $\log 1000=3$ 、 $\log 2000=\log 1000+\log 2=3+\log 2\approx 3.3010$ ，知
 $\log 1000<\log c<\log 2000$ ，推得 $1000<c<2000$ 。

選項(4)：由 $\log 10=1$ ，知 $\log 20=\log 10+\log 2\approx 1.3010$ 。由 $\log 10<\log a<\log 20$ ，推得
 $10<a<20$ ；由 $\log 100=2$ ，知 $\log 100<\log b$ ，得 $100<b$ 。
故 $b>2a$ 。

選項(5)：【解法一】

$$\log_2 a + \log_2 c = \log_2 ac = \log_2 (10^{1.1} \times 10^{3.3}) = \log_2 10^{4.4}，$$

$$\log_2 10^{4.4} = 2\log_2 10^{2.2} = 2\log_2 b，$$

由此可知 $\log_2 a$ 、 $\log_2 b$ 、 $\log_2 c$ 依序成等差數列。

【解法二】

$$\text{由 } \log_2 a = \frac{\log a}{\log 2} = \frac{1.1}{\log 2}、\log_2 b = \frac{\log b}{\log 2} = \frac{2.2}{\log 2}、\log_2 c = \frac{\log c}{\log 2} = \frac{3.3}{\log 2}，$$

推得 $\log_2 a + \log_2 c = 2\log_2 b$ ，故 $\log_2 a$ 、 $\log_2 b$ 、 $\log_2 c$ 依序成等差數列。

試題編號：8

參考答案：(1)(2)(5)

學科內容：N-12 乙-1 複數、A-12 乙-2 方程式的虛根

測驗目標：複數運算、複數平面、實係數方程式虛根成對

試題解析：根據題意 $z_2 = z_1 \cdot i$ ，即 $\sqrt{3}+bi = (1+ai) \cdot i = -a+i$ 。由兩相等複數有相同實部及虛部，推得

$$a = -\sqrt{3}、b = 1，\text{即 } z_1 = 1 - \sqrt{3}i、z_2 = \sqrt{3} + i。$$

選項(1)： $a+b = -\sqrt{3}+1 < 0$ 。

選項(2)： $|z_1| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ 。

選項(3)： $z_1 + z_2 = (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i$ ，

$$\text{則 } |z_1 + z_2| = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{(4 + 2\sqrt{3}) + (4 - 2\sqrt{3})} = 2\sqrt{2}，$$

$$|z_1| + |z_2| = 2 + 2 = 4，\text{因此 } |z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|。$$

選項(4)：由實係數方程式虛根成對，知 $1+\sqrt{3}i$ 也為實係數方程式 x^2-2x+k 的一根，推得 $x^2-2x+k=(x-(1+\sqrt{3}i))(x-(1-\sqrt{3}i))$ ， $k=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=4$ 。此選項也可將 $z_1=1-\sqrt{3}i$ 代入得 $(1-\sqrt{3}i)^2-2(1-\sqrt{3}i)+k=0$ ，推得 $k=4$ 。

選項(5)： $|z_2-z_1|=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(1+\sqrt{3})^2}=\sqrt{(4-2\sqrt{3})+(4+2\sqrt{3})}=2\sqrt{2}$ ，
故以 z_1 、 z_2 、原點 O 三點為頂點的三角形邊長為 2 、 2 、 $2\sqrt{2}$ 。推得其為直角三角形，面積為 $\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$ 。

試題編號：9

參考答案：(1)(2)

學科內容：A-10-2 多項式之除法原理、F-12 乙-2 函數的極限、F-12 乙-3 微分、F-12 乙-5 積分

測驗目標：極限的運算性質、導數的定義、微積分基本定理

試題解析：選項(1)：由題意 $f(x)$ 是多項式函數，知 $f(x)$ 為連續函數。

$$\text{故 } f(2)=\lim_{x\rightarrow 2} f(x)=\lim_{x\rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}\cdot(x-2)=\lim_{x\rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}\cdot\lim_{x\rightarrow 2}(x-2)=6\cdot 0=0。$$

選項(2)：因為 $f(2)=0$ ，推得 $f'(2)=\lim_{x\rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}=6$ 。

選項(3)：將 $x=0$ 代入得 $f(0)=0-8+\int_0^0 g(t)dt=-8$ 。

選項(4)： $\lim_{x\rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2-4}=\lim_{x\rightarrow 2} \left(\frac{f(x)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right)=\lim_{x\rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}\times\lim_{x\rightarrow 2} \frac{1}{x+2}=6\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$ 。

選項(5)：利用微積分基本定理，推得 $f'(x)=3x^2+\frac{d}{dx}\int_0^x g(t)dt=3x^2+g(x)$ 。因為 $f'(2)=6$ ，
推得 $g(2)=f'(2)-3\times 2^2=-6$ 。

試題編號：10

參考答案：-3

學科內容：A-11B-1 矩陣與資料表格(A-11A-1 二元一次方程組的矩陣表達、A-11A-3 矩陣的運算)

測驗目標：矩陣運算、反方陣

試題解析： $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的反方陣 $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，

$$\text{則 } \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -24 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}，\text{推得 } a+b+c+d=-3。$$

試題編號：11

參考答案：5.8

學科內容：F-10-1 一次與二次函數、F-12 乙-4 導函數、F-12 乙-5 積分

測驗目標：導數的邊際意涵、函數極值、一次函數的反導函數與定積分

試題解析：邊際利潤 $F'(x) = 200 - 0.4x$ ，得反導函數 $F(x) = -0.2x^2 + 200x + c$ ，其中 c 為一常數。已知銷售 200 個公仔的利潤為 4 萬元，代入 $F(x)$ 得 $40000 = 200 \times 200 - 0.2(200^2) + c$ ，推得 $c = 8000$ ，故 $F(x) = -0.2x^2 + 200x + 8000$ 。由 $F'(x) = 200 - 0.4x = 0$ ，故當 $x = 500$ 時， $F(x)$ 有最大值 58000，即最大利潤為 5.8 萬元。此題也可利用配方法求出最大利潤。

試題編號：12

參考答案： $\frac{6\sqrt{21}}{7}$

學科內容：G-10-5 廣義角和極坐標、G-10-7 三角比的性質

測驗目標：極坐標的定義、餘弦定理、三角形的面積

試題解析：由極坐標定義可知 $\overline{OP} = 4$ 、 $\overline{OQ} = 6$ ， $\angle POQ = 105^\circ - 45^\circ = 60^\circ$ （如圖所示）

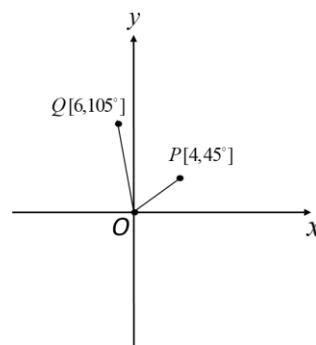
由餘弦定理 $\overline{PQ}^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos 60^\circ$ ，得
 $\overline{PQ} = 2\sqrt{7}$ 。

利用面積公式，三角形 POQ 的面積為

$$\frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{OQ} \times \sin \angle POQ = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}。$$

由 O 到直線 PQ 的距離為三角形 POQ 在 PQ 邊上的

高，即 O 到直線 PQ 的距離 $= \frac{6\sqrt{3} \times 2}{2\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{21}}{7}$ 。



第貳部分、混合題或非選擇題

13-15 題為題組

試題編號：13

參考答案：(5)

學科內容：G-11B-2 (G-11A-6) 平面向量的運算

測驗目標：平面向量的內積

試題解析： $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = (-4, -3) \cdot (-6, -8) = 24 + 24 = 48$ 。

試題編號：14

參考答案： $(\frac{103}{25}, \frac{79}{25})$

學科內容：G-11B-2 (G-11A-6) 平面向量的運算

測驗目標：平面向量的正射影

試題解析： $\overrightarrow{OQ}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影為 $\frac{\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2} \overrightarrow{AB} = (3, 4)$ ， $\overrightarrow{AO}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影為

$$\frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2} \overrightarrow{AB} = \frac{(-4, -3) \cdot (-6, -8)}{100} (-6, -8) = \frac{48}{100} (-6, -8) = \left(-\frac{72}{25}, -\frac{96}{25}\right)。$$

又 $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OQ}$ ，可得 $\overrightarrow{AQ}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影 $\overrightarrow{AC}$ 為

$$\frac{\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2} \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2} \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2} \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{72}{25}, -\frac{96}{25}\right) + (3, 4) = \left(\frac{3}{25}, \frac{4}{25}\right)$$

已知點 A 的坐標為 $(4, 3)$ ，故點 C 的坐標為 $\left(\frac{103}{25}, \frac{79}{25}\right)$ 。

試題編號：15

參考答案： $a = \frac{3}{5}$ 、 $b = \frac{2}{5}$ 、 $P(8, -1)$

學科內容：G-11B-1 (G-11A-1) 平面向量

測驗目標：平面向量的線性組合

試題解析：以下提供兩個解法說明 $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{2}{3}$ ：

【解法一】

利用面積比等於同高的底邊長之比，得 $\frac{\Delta OAD}{\Delta PAD} = \frac{\overline{OD}}{\overline{PD}} = \frac{\Delta OBD}{\Delta PBD}$ ，令 $\frac{\Delta OBD}{\Delta PBD} = k$ 。

因此 $\Delta OAD = \frac{k}{k+1} \cdot \Delta OAP = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{2}{3} \Delta OBP = \frac{2}{3} \Delta OBD$ ；故 $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\Delta OAD}{\Delta OBD} = \frac{2}{3}$ 。

【解法二】

作 $\overline{AE}$ 垂直 $\overline{OP}$ 於點 E ，且 $\overline{BF}$ 垂直 $\overline{OP}$ 於點 F ，則 ΔAED 與 ΔBFD 相似，故

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = \frac{\frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{AE}}{\frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{BF}} = \frac{\Delta OAP}{\Delta OBP} = \frac{2}{3}。$$

由此可取 $a = \frac{3}{5}$ 、 $b = \frac{2}{5}$ ，使得 $\overrightarrow{OD} = \frac{3}{5} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{5} \overrightarrow{OB} = \frac{3}{5}(4, 3) + \frac{2}{5}(-2, -5) = \frac{1}{5}(8, -1)$ 。

設 $\overrightarrow{OP} = t(8, -1)$ ，再由 $\overline{OP} = \sqrt{65}$ ，可知 $t = 1$ ，故點 P 的坐標為 $(8, -1)$ 。

16-18 題為題組

試題編號：16

參考答案： $a=11$ 、 $b=12$

學科內容：G-10-2 直線方程式、A-12 乙-1 線性規劃

測驗目標：根據題意，求得線性規劃問題的最佳解

試題解析：根據題意知車商售出一台甲車得淨利潤 11 萬元、售出一台乙車得淨利潤 12 萬元，故售出甲車 x 台、乙車 y 台時，車商可得淨利潤為 $11x+12y$ （萬元）。

試題編號：17

參考答案：
$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x \leq 20 \\ y \leq 30 \\ 5x + 6y \leq 220 \end{cases}$$

學科內容：G-10-2 直線方程式、A-12 乙-1 線性規劃

測驗目標：根據題意，求得線性規劃問題的最佳解

試題解析：根據題意，由甲廠牌汽車每台成本 100 萬元，進口上限 20 台；乙廠牌汽車每台成本 120 萬元，進口上限 30 台，及車商準備 4400 萬元作為汽車進口成本，可列出不等式並化簡

得
$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x \leq 20 \\ y \leq 30 \\ 5x + 6y \leq 220 \end{cases}。$$

試題編號：18

參考答案：甲廠牌汽車 20 台、乙廠牌汽車 20 台，最大淨利潤 460（萬元）

學科內容：G-10-2 直線方程式、A-12 乙-1 線性規劃

測驗目標：根據題意，求得線性規劃問題的最佳解

試題解析：依據題意，目標函數 $P(x, y) = 11x + 12y$ ，求解聯立方程式可得出可行解區域的頂點坐標 $(0,0)$ 、 $(0,30)$ 、 $(8,30)$ 、 $(20,20)$ 、 $(20,0)$ 。

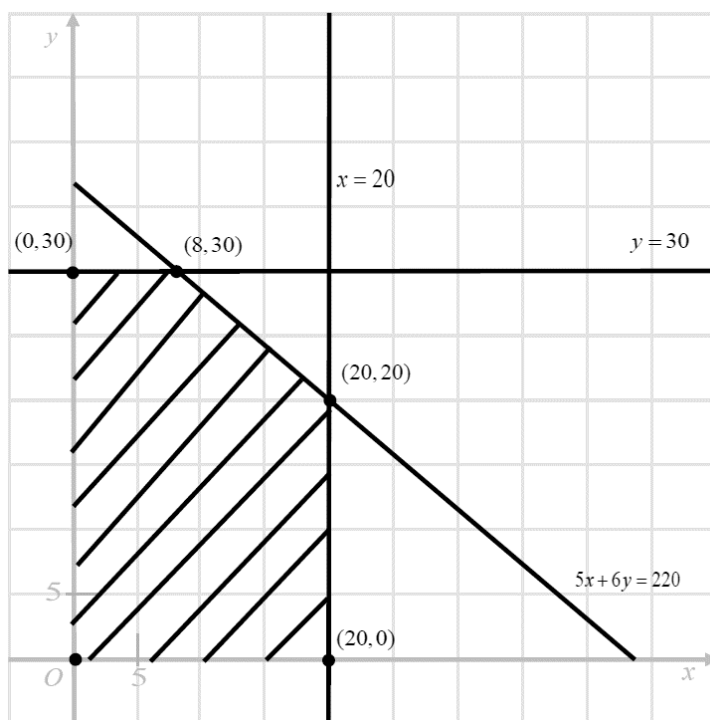
以下提供兩個解法求出最大利潤：

【解法一】頂點法

將可行解區域的頂點坐標代入目標函數

(x, y)	$(0,0)$	$(0,30)$	$(8,30)$	$(20,20)$	$(20,0)$
$P(x, y) = 11x + 12y$	0	360	448	460	220

可知當進口甲廠牌汽車 20 台，乙廠牌汽車 20 台時，可獲得最大淨利潤 460（萬元）。



【解法二】平行線法

設 $P(x, y) = 11x + 12y = k$ ， $k \geq 0$ ，則 $11x + 12y = k$ 的斜率為 $-\frac{11}{12}$ ，

直線方程式 $5x + 6y = 220$ 的斜率為 $-\frac{5}{6} > -\frac{11}{12}$ ，

由可行解區域及平行線法知當 $x = 20, y = 20$ ，即進口甲廠牌汽車 20 台，乙廠牌汽車 20 台時，可獲得最大淨利潤 $20 \times 11 + 20 \times 12 = 460$ (萬元)。

