彰化女中 113 學年度教師甄選數學科試題卷

一、填充題(每 5 分，共 90 分)

1、x，y 為實數，則 $\sqrt{(x+5)^2+(y+4)^2+25}+\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2+49}$ 之最小值是________。

2、將一塊正方形的厚紙板劃分成面積相等的 $5\times5=25$ 個小正方格，今欲將三枚不同顏色的棋子任意放置於小正方格的中心處，且每個小正方格至多只能放置一枚棋子。試問：這三枚棋子可構成三角形的三個頂點之機率為________。

3、設 $f(x)=x+\dfrac{2}{x}+\dfrac{64}{9}\left(\dfrac{x}{x^2-x+2}\right)$，$x>0$。設正數 a 使得函數 $f(x)$ 有最小值 $f(a)$，則所有符合之 a 的總和為________。

4、設 $f(x)$ 為可微分函數，若 $f(1)=2$，$f'(1)=5$，則 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}=$________。

5、若 S_n 為曲線 $y=x^{n+1}$ 與 $y=x^n$，$n\in N$ 所圍區域的面積，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n=$________。

6、將六面均塗紅漆之正立方體木塊(邊長為 10)，鋸成 1000 個大小相同的小正立方體(邊長為 1)混置一袋中，若自袋中任取兩塊，則兩塊小正立方體的十二面中，有塗紅漆面數的期望值為________面。

7、設 $a\ge0,\ b\ge0,\ c\ge0$，$a+b+c=1$，$x=a+3b+4c$，$y=2a+b+3c$，求在 xy 平面上點 (x,y) 所形成區域的面積為________。

8、在複數平面上，$\left|z(-1+\sqrt{3}i)\right|=4$，求 $\dfrac{1}{2}|z-4i|+|z-3|$ 最小值為________。

9、若 H 為 ΔABC 垂心，且 $\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，求 $\cos\angle BAC=$________。

10、已知 $\int_1^x f(t)dt=\dfrac{1}{3}x^3+ax+b$ 其中 a、$b\in R$，$g(x)=2^x+2^{-x}$，若 $f(x)$與$g(x)$交於A、B兩點，且 $\overline{AB}=2$，求 $a-b=$________。

11、如果 x，y 為實數，$-\sqrt{4-x^2}\le y\le -x^2+4$，求 $3x+y$ 的範圍________。

12、數列 $<a_n>$ 滿足遞迴關係 $\begin{cases}a_1=2\\ a_{n+1}=\dfrac{3}{2a_n+1},n\ge1\end{cases}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-1)(-\dfrac{3}{2})^n=$________。

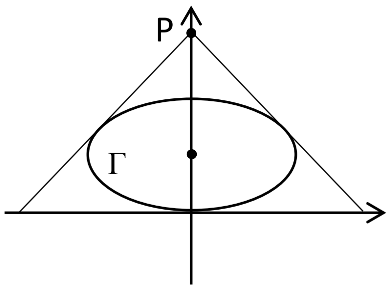
13、求 $\left(1+x+x^2+x^3\right)^6$ 展開式中 x^5 的係數=________。

14、彰女某班段考數學平均 60，標準差 5，物理平均 70，標準差 6，若每人將兩科分數相加，其標準差為 9，求物理(y)對數學(x)的迴歸直線________。

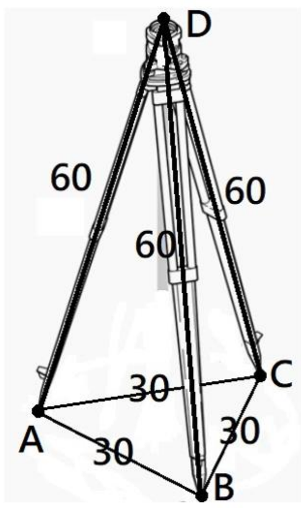
15、設 $0.216\le x\le1$，求 $f(x)=x^{(\log_{0.6}x-2)^3}$ 的最大值為__________。

16、已知滿足方程式 $|z+3|+|z-3|=10$ 的三個複數 z_1、z_2、z_3 中，$|z_1+3|$、$|z_2+3|$、$|z_3+3|$ 為等差數列，已知 $z_2=\dfrac{5}{4}+\sqrt{15}i$，求 $\text{Re}(z_1+z_3)=$________。(Re(z) 表 z 的實部)

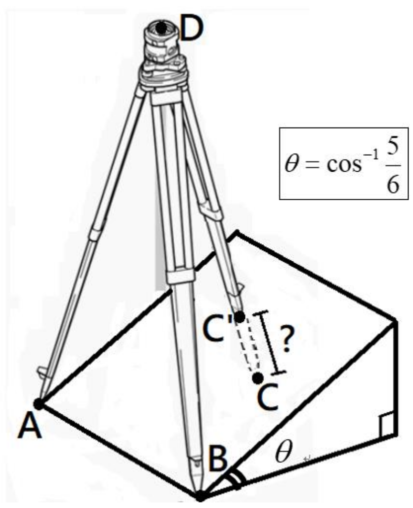
17、座標平面上有一個橢圓 $\Gamma: \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$ 及一點 $P(0,a)$，其中 $a>6$，由 P 點向橢圓作兩切線，分別交 x 軸於 $A,\ B$ 兩點，當 $a=m$ 時 ΔPAB 面積有最小值 M，則數對 $(m,M)=$ ______。



18、在攝影器材中，三腳架是用來穩固相機提升拍照品質的重要工具，可以利用腳架的伸縮以保持相機的水平視角。將某三腳架置於水平地面時（如圖一所示），三個腳架底 A、B、C 兩兩距離皆為 30 公分，且最高點 D 與 A、B、C 三點的距離皆為 60 公分。現將此三腳架置於一傾斜角為 $\cos^{-1}\dfrac{5}{6}$ 的斜坡上（如圖二所示），使 A、B 兩點位於斜面與地面之交線上，此時若將 $\overline{CD}$ 縮短為 $\overline{C'D}$，可保持三腳架的高度不變（即 D 點與水平地面的高度不變），以維持相機視角仍為水平。請求出圖二中線段 $\overline{CC'}=$ ______。



(圖一)



(圖二)

二、計算證明題(共 10 分)

1、

給定轉移方陣 $A=\begin{bmatrix}0.1 & 0.7\\ 0.9 & 0.3\end{bmatrix}$、單位方陣 $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，小夫計算 A^n 時，利用將 A^n 表示為 A 與 I 的線性組合來簡化計算，表示為 $A^n=\alpha_n\cdot A+\beta_n\cdot I$。例如：

$A^2=\begin{bmatrix}0.64 & 0.28\\ 0.36 & 0.72\end{bmatrix}=0.4\cdot A+0.6\cdot I$，此時 $\alpha_2=0.4$、$\beta_2=0.6$；

$A^3=\begin{bmatrix}0.316 & 0.532\\ 0.684 & 0.468\end{bmatrix}=0.76\cdot A+0.24\cdot I$，此時 $\alpha_3=0.76$、$\beta_3=0.24$。

請根據以上敘述，證明：

(1) 對於所有自然數 $n\ge 2$，$\alpha_n+\beta_n=1$。(2 分)

(2) 對於所有自然數 $n\ge 2$，皆滿足 $\alpha_{n+1}=-0.6\cdot\alpha_n+1$，並以此求 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ 之值。(3 分)

2、

證明：對於所有大於 1 的自然數 n 而言，$\sin\dfrac{\pi}{n}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdot\sin\dfrac{3\pi}{n}\cdot\ \cdots\ \cdot\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$ 恆成立。(5 分)