

探討高中數理資優班學生參加數學 建模競賽解題歷程

陳香妘¹

摘 要

本研究透過 15 位高中二年級數理資優班學生，分別參加兩次競賽過程，探討高中數理資優班學生參加數學建模競賽解題歷程。兩次競賽為中華國際數學建模挑戰賽委員會為中學生辦理的國際數學建模挑戰賽(IMMC) 2019 中華賽秋季競賽，及台灣數學建模與創意學會為高中學生辦理的第 17 屆全國數學建模競賽。

本研究採用個案研究法，整個個案是由分別參加兩次數學建模競賽的六組個案所形成。蒐集學生的認知需求量表前測及後測、參加數學建模競賽心得問卷、晤談內容、解答論文及第二次競賽複賽發表錄影等資料。

研究結果發現：解題歷程包括選擇題目、進入問題情境、尋找解題關鍵點、尋求適合的數學理論、依題目設定變數與依變數、建立數學模型、數學模型代入問題情境驗證、發展延伸數學模型、修正原有數學模型到上傳解答論文等過程。

本研究提出建議為：鼓勵高中學生參加數學建模競賽，希望數學教育者研發更多適合數學建模競賽解題的題組，相關單位能推廣數學建模競賽，使數學建模競賽更具公信力及規模性。未來研究者可進行設計實驗，更深入探討數學建模競賽解題歷程。期盼有更多優秀高中學生經由數學建模競賽，使他們的能力被看見與肯定。

關鍵詞：數學建模、數學建模競賽、數學模型

¹彰化女中校長

一、緒論

隨著科技日益進步，人們面對的問題更加複雜，問題也可能是未曾出現，解決這些問題，往往需要跨領域的知識來處理。在跨域整合知識中，數學能力是非常重要的。1986 年美國國家科學委員會(National Science Board)提出 STEM 整合教育，強調科學(science)、科技(technology)、工程(engineering)與數學(mathematics)整合教育的重要性，數學即被列為其一。

數學建模(mathematical modeling)是以建立數學模型(mathematical model)的方式來解決真實世界的問題，符應數學教育融入生活中的問題情境要求，發展數學建模能力也是數學教育的一個重要面向(Lesh & Doerr, 2003)。

為了增進學生數學能力、問題解決能力與競爭力，以面對未來世界的挑戰，許多國家把「數學建模能力」列入數學素養能力。我國在《十二年國民基本教育課程綱要》(教育部，2018) 中，明確指出普通型高級中等學校數學領域核心素養「數 S-U-A2 具備數學模型的基本工具，以數學模型解決典型的現實問題。了解數學在觀察歸納之後還須演繹證明的思維特徵及其價值。」教育部在十二年國民基本教育課程綱要的數學領域之基本理念中，也將數學建模列入，其說明如下：「用數學符號表達溝通、並培養數學應用與建模能力，並能解決日常生活問題、解釋自然現象、能對社會議題合宜量化推理分析的目標。」(教育部，2018) 在 109 學年度的高中二年級數學 B 版課程內容中，即列入「週期性數學模型」、「按比例成長模型」單元，由數學模型納入課程內容單元，可見數學建模能力的重要性。

以數學建模解決問題，能夠顯現出數學世界與真實世界的相關性，而數學模型居中扮演重要的角色。數學模型是一個工具，數學模型以數學來表示現實世界的情境，能促進人們對現實世界問題加以量化、分析及預測 (Bliss 等人，2014)。在大數據和網路互動頻繁的今日，數學建模更透過結合建模和計算，顯現數學已成為第四次工業革命和文明持續進步不可缺少的基本工具和關鍵能力。

越來越多國家認為數學建模能力是學生應具備的重要數學能力，除了重視數學建模教學外，也開始舉辦各種數學建模競賽。透過數學建模競賽，瞭解學生數學建模的真實歷程，亦驗證學生運用數學工具來描述世界的能力，更可考驗團隊的合作和表達力，因此數學建模競賽是非常有意義的競賽。數學建模競賽最初舉辦是以大學生為參賽對象，美國數學及其應用聯合會(COMAP)即自

1985 年開始辦理「美國大學生數學建模競賽(MCM/ICM)」，COMAP 又於 1999 年增加辦理「美國高中數學建模競賽(HiMCM)」，香港 2015 年開始辦理「國際數學建模競賽(IMMC)」，台灣數學建模與創意學會則自 2001 年起辦理以高中生為參賽對象的「高中高職數學作文競賽」，該學會 2017 年符應國際數學建模競賽趨勢，改為競賽限定 96 小時解題的「96 小時制高中高職數學建模競賽」。

數學建模競賽為了讓參賽者能夠表現數學能力，體驗以數學解決實際生活情境問題，所以競賽題目比傳統數學課室解題的題目更為複雜；競賽過程中，教師不能指導或提示，完全由學生自行規劃；競賽有時間限制，解答要以論文形式上傳；數學建模競賽僅提供問題情境，沒有具體明確的數學問題，需要學生自行發現形成，再從情境問題轉換為數學問題，然後建立數學模型加以解決，最後回應真實世界問題。

數學建模競賽的重要性，誠如中華國際數學建模挑戰賽委員會在 IMMC 2019 邀請函所言：鼓勵參賽者應用數學建模，探索和解決現實世界的重要問題，以普及數學建模教育，增強中學生科技創新核心素養與關鍵能力。既是中學生數學建模與 STEM 實踐歷練的舞臺，也是參賽中學的數學暨 STEM 教育成果展示與交流的園地。

本研究依據數學建模相關理論，也參考有關解題歷程、合作問題解決等相關研究，藉由閱讀高中數理資優班學生參加數學建模競賽解答論文、進行晤談、填寫量表與問卷等方式，從選題、思考、分析、預測、數學表徵和驗證等面向，探討學生參加數學建模競賽的解題歷程。並提出有關數學建模競賽的建議，期望數學建模競賽更受到高中數學教師重視及提升高中學生參賽意願。

二、文獻探討

（一）數學建模的意涵

數學建模(Mathematical Modeling) 過程包含以下階段：(1)現象觀察(2)推測關係得到與現象相關的模型(model)(3)應用數學分析模型(方程式、符號架構...等) (4)得到數學結果重新詮釋此模式獲得結論(Swetz & Hartzler,1991)。數學建模活動不同於傳統的解題，傳統的解題將焦點放在問題的數學表徵化和求解的階段性過程(瞭解問題、擬定計畫、形成計畫、回顧)，但是數學建模則將發現解答的焦點改變為轉換與詮釋情境資訊、辨別潛在的問題、建立模式、再詮釋數學解答的前提、假設與可能的偏誤等思考的目標 (楊凱琳和楊子錕，2007)。

所以，數學建模是在學習者基本既有的認知情境下，藉由探索的過程，發現、尋找出結果，並用數學檢測是否合理。

數學建模亦是將真實世界和數學世界間進行雙向轉換，現實世界中的問題經過轉換成數學問題，對於數學問題透過建模過程建立合適的數學模型，此為從現實世界到數學世界；將得到對應的數學問題解決方案，回應到現實世界中，加以詮釋和驗證，則為從數學世界到現實世界的轉換。數學建模活動表現於外在是一種理論系統的心智創造或紙筆創作，其內在則是結合理論結構和分析(王明慧、洪振方、柳賢，2006)。雖然數學建模一詞有許多不同的說法，但其中必定包含介於待建模的真實情境和此模式的數學表徵間的轉換過程 (Mason & Davis, 1991)。

具體來說，數學建模是以精簡設計過的情境來思考事物，並建立出包含所有已知要素特徵的人造世界相關模型，當此模型被建立時，相關要素的意義就被決定了。在數學建模中的「模型」(model)，依據美國 2018 年出版的數學建模教育評量與指導手冊定義：模型是指包括操作、示範、角色模型化(role modeling)及數學的概念化模型。

Niss(1989) 定義數學建模過程包括四個面向：(1)具體世界的情境(real problem situation)；(2)將真實世界的模式數學化即透過資料(data)、概念(concept)、關係(relation)、情境(condition)轉換成數學關係；(3)以適當數學方法解決(4)將結果解釋真實世界。Lesh 和 Doerr(2003)提出數學建模過程則屬於循環型，其建模循環理論包含四階段的建模循環過程 (modeling cycles) (圖 1)：(1) 描述 (description)，建立由真實世界的問題到模型世界的一種映像，亦即藉由描述建構模型；(2)操作(manipulation)，對於經由描述所建構的模型進行操作，對相關的原始問題解決情境，產生預測或行動，期望符合真實世界的情境；(3)轉化(translation)或預測(prediction)，將操作所得的相關結果，提出轉化或預測，藉以對真實世界的問題，作出回應；(4)證實(verification)，對行動及預測的有效性，提出驗證的作法。也就是將情境描述成數學問題的描述階段，再建立解決數學問題的模型，最後再透過修正及驗證數學模型，以確認模型可行性，數學建模歷程基本流程圖如圖 1。

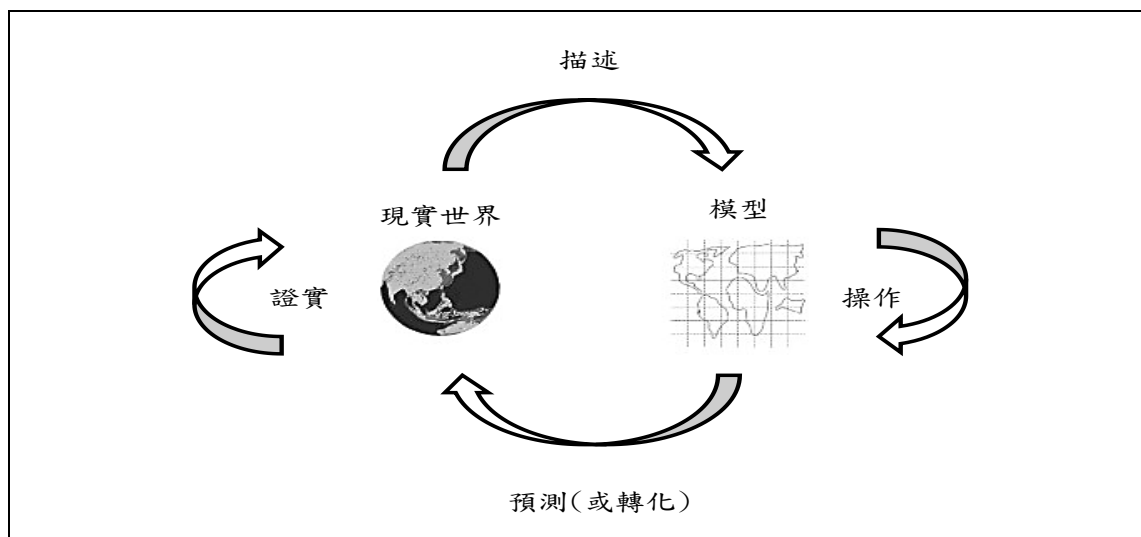


圖 1 數學建模歷程基本流程圖(Modeling cycles) (譯自 Lesh & Doerr, 2003)

本研究探討的高中學生參加數學建模競賽解題歷程，與 Lesh 和 Doerr 的數學建模歷程，學生在競賽中對於主辦單位所給兩個題目情境，先經過閱讀與小組討論後，決定欲解答的題目。

依據 Lesh 及 Doerr (2003)指出教師在引導學生進行數學建模，其模式發展序列有三個過程：引模活動(model eliciting activity)、探模活動(model exploration activity)、展模活動(model application activity)。引模活動中，學生建立一個模式來描述、解釋、操作、預測某些結構化的系統，而此系統乃為真實生活的知識與經驗延伸；探模活動中，學生經由深入探究那些隱含在建構的模式中，相關的樣式及規律；展模活動中，讓學生運用探索、修正、促進的模式來驗證問題情境。而學生參加數學建模競賽解題歷程，雖然沒有教師在旁引導，仍有類似的數學建模模式發展序列。

Blum(1993)提出數學建模歷程由真實世界的真實情境開始，經過簡化或建構，產生真實世界的模式；再透過數學化的過程，發展出數學模式，透過數學化思考產生數學世界的數學結果；最後再詮釋回應到真實世界的真實情境，且如此不斷循環到最佳模式產生。

Blum 和 Leiß(2006)將數學建模細分為一個非線性的迴圈，Blum 和 Leiß(2007) 又再修正數學建模循環迴圈如圖 2：

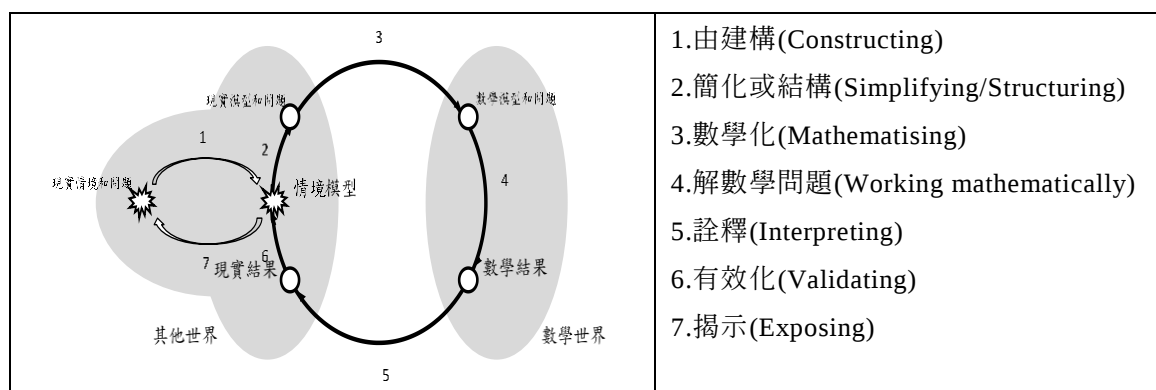


圖 2 建模循環迴圈(Modelling cycle)(譯自 Blum & Leiß, 2007)

Stillman(2007)主張建模歷程某些階段具有雙向性，其建模歷程如圖 3。

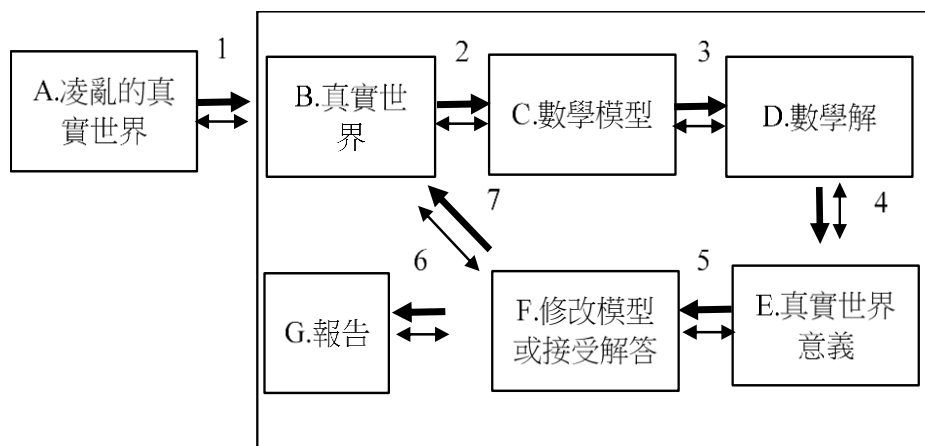


圖 3 建模歷程(Modelling cycle) 譯自(Stillman, Galbraith & Brown, 2007)

圖 3 中的數字說明如下：1.理解、組織、簡化、說明 2.假設、程式化、數學化 3.數學方式進行 4.數學說明輸出 5.比較、批判、驗證 6.溝通、決定(若模型符合)7.修正(若模型不符合)

圖 3 中的進行方式為：

1. A→B：從凌亂的真實世界(A)，篩選數學上可行的部分作出相關的問題陳述真實世界(B)。
2. B→C：根據先備知識及經驗，形成數學模型(C)。
3. C→D→E：運用數學方法得到模型(C)後，就數學問題提出數學解決方案(D)；數學化完成後，使用預期的數學程序和策略來解決問題。

4. $E \rightarrow F \rightarrow B$ ：數學解帶入真實世界後，會經過修正再次進入迴圈或不修正直接接受解答。

5. $F \rightarrow G$ ：當解答是可行時，便可提出相關報告。

GAIMME (2018)一書中亦有類似 Stillman 建立的數學建模歷程，但是建模過程與其中的發展方向可能是雙向或是某個步驟間會有來回重複發生，更吻合數學建模實際進行的過程。

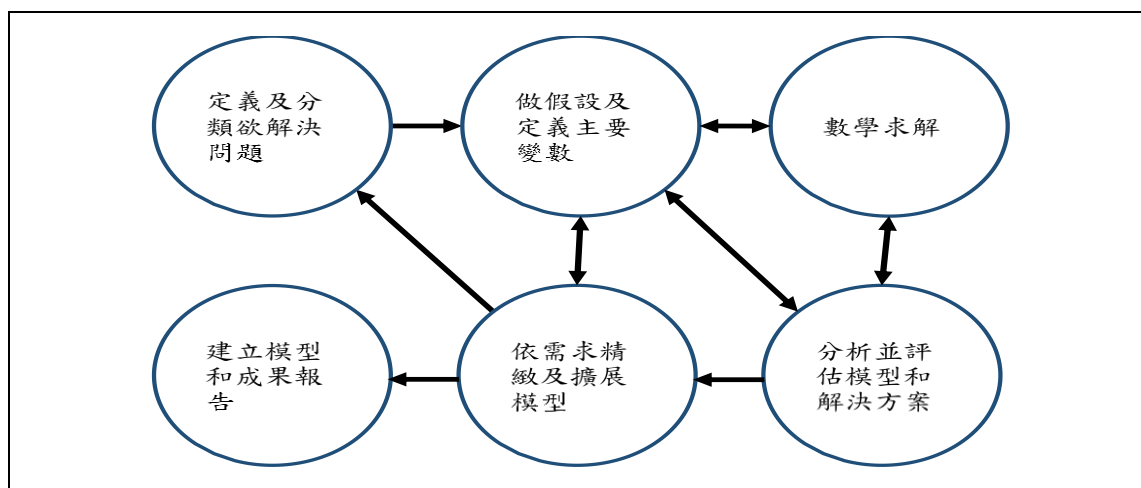


圖 4 GAIMME 提出的建模過程與其中的關係(譯自“GAIMME”, 2018)

(二) 數學解題理論

1930 年代開始，解題已是數學教育學者和心理學者積極研究的一項議題(沈明勳，2013)。知識是人類解題的結果，讓學生解題以建構知識，是絕佳的教學策略 (張靜馨，1995)。Dewey (1910)對於解決問題提出反省思考的五個步驟，包括：1.發現問題(suggestion)：意識到遭遇困難，產生認知困惑；2.界定問題(intellectualization)：從困惑的情境中，確定問題的已知和未知；3.提出方案(the guiding idea,hypothesis)：分析問題情境，連結認知結構，從而提出可能的假設或解決的辦法；4.推理(reasoning)或演繹假設：從所有解決方案中，推演假設以選擇合理的辦法；5.執行與檢驗方案(testing the hypothesis by action)：執行所選擇的方案，並驗證而得到結論。杜威的解決問題反省思考步驟，並非只針對數學領域。

Polya(1945)將數學解題歷程分為四個步驟，包括：瞭解問題(understanding the problem)、擬定計畫 (devising a plan)、執行計畫 (carrying out the plan)及回

顧答案 (looking back)，該理論對於數學教育產生很大的影響。比較 Polya 數學解題歷程與數學建模競賽解題歷程的問題並不相同，Polya 當時所指的問題，係指有特定的未知數和已知數的數學問題；解題是找出問題的正確解答。而數學建模競賽的問題，情境可能沒有數學化，必須由參賽者依據情境問題轉換形成數學問題；未知數和已知數則是參賽者依據形成的數學問題，針對問題自行假設；而且得到的解答是指合理的解答方案，不是所謂的正確答案，除了合理性，也重視創意與團隊合作。

Shoenfeld(1985)在其解題歷程模式中提出「信念系統」(belief system) 以及「後設認知」(metacognition)概念，其數學解題重視能夠流暢地使用啟發法(heuristic)。且把解決數學問題過程分為三部分：分析(analysis)、探索(exploration)與驗證解答(verifying your solution)。說明如下：

- 1.分析：包括畫圖、檢驗特例與嘗試簡化。研究者認為就題目情境，畫出圖形，能幫助解題思考；針對特殊範例加以檢驗，可以找出共通性或解題提示點；把題目情境加以簡化，使得思考範圍更能聚焦。
- 2.探索：考慮相似題目、思考微調的題目與大幅修改的題目。研究者認為不同題目之間，也許有相似點，針對過去既有經驗，可以幫助解決現在面對的問題，這也是一種類比思維的運用。
- 3.驗證解答：提出解答必須經得起特定檢驗與一般檢驗。研究者認為提出解答，不是單一形式檢驗即可，也要能夠經得起一般檢驗沒有矛盾產生。

研究者比較 Shoenfeld 解題歷程與數學建模競賽解題歷程，認為二者相似處在於兩種解題歷程都要先理解問題情境；數學建模競賽解題歷程也會運用類比思維進行，此與 Shoenfeld 解題歷程類似，考慮相似題目、思考微調的題目與大幅修改的題目。

Shoenfeld 解題歷程與數學建模競賽解題歷程不同的是，數學建模競賽有兩個題目可以選擇，解題歷程首先要面對選擇題目，選擇題目與參賽者先備知識、問題情境熟悉程度、小組共識有關。而在數學建模競賽驗證數學模型時，可能會來回進行「執行」與「驗證」過程，除了修正原有模型，也可能會再提出延伸數學模型，與 Shoenfeld 解題歷程驗證解答正確與否不同。

Mayer (1992)從認知心理學的觀點，分析解題歷程所需的知識包括：語言方面、語意方面、基模方面、策略方面與程序性方面。解題歷程又分為 1.表徵問題：問題理解詮釋與整合 2.解決問題：計畫、監控與執行。數學建模競賽解題歷程，亦需要相關知識，與類似解題歷程。

Krulik 與 Rudnick (1996)提出數學解題歷程的五個階段如下：(1)閱讀與思考：解題者以自己的語言了解並思考問題；(2)探索與計畫：解題者分析資料，並發展解題計畫；(3)選擇策略：選擇適當的解題策略是解題成功的關鍵因素，常用的解題策略如下：認識樣式、逆推法、推測與驗證、試驗或模擬、簡化/變形、有組織的列表/詳盡的列表、邏輯演繹、分割與克服、寫出方程式；(4)找出答案：使用適當的數學技巧計算答案；(5)反省與擴展：檢查答案的正確性與合理性、找出其他解法、改變問題的條件並觀察對答案的影響與一般化所得之答案等(引自馬秀蘭與吳德邦，2009)。

比較傳統數學解題與數學建模的解題，傳統解題要求正確的答案，而數學建模重視分析、模擬、模式化關係等式、實驗性實作、說明及詮釋等過程是否完整。數學解題活動在建模循環中必須經過簡化階段(simplify)，與做決策(making decision)階段，忽略關聯性低的條件，發展出連結重要概念的感覺之方式，而建模過程抽象化階段實則涉及數學化的過程(Kehle & Lester, 2003)。

傳統的問題解決預設了特定的條件與目標，Lesh 與 Doerr (2003)對於數學解題提出建模觀點，認為數學解題活動所扮演的角色，在建模活動中是一種「引模」活動，目的在於幫助學生發展其數學模型。陳惠茹和柳賢(2008)認為數學建模活動的問題情境包含了不同的解題情境，即後者是依據建模者對真實生活問題中蘊含之條件的洞察與抉擇而衍生，故後者之問題情境乃隨著前者的調整而有所改變。

進一步比較傳統解題與學生參加數學建模競賽的解題，傳統的解題焦點在問題的數學表徵化和求解的階段性過程(瞭解問題、擬定計畫、形成計畫、回顧)，學生參加數學建模競賽則將發現解答的焦點改變為轉換與詮釋情境資訊、辨別潛在的問題、建立模式、再詮釋數學解答、修正假設與可能的偏誤。

無論是傳統解題或是數學建模競賽解題，解題者都必須先了解問題並進行思考；分析資料後，接著研擬解題方向；然後就發現的規律或解題關鍵，選擇可行的解題策略；最大不同是前者使用數學演繹、歸納、推理、計算找出正確答案，後者則是提出相關數學模型；最後都要驗證答案，前者要求正確性，後者無論用何種方式建立數學模型，重視與現實情境問題的關聯性、模型方案的合理性、亦可再提出延伸模型增進完整性。

(三) 合作問題解決

數學建模競賽讓參賽者體驗以數學解決現實問題。競賽以 3 或 4 人為一組，需要團隊合作解決問題，必須透過合作完成建立模型、驗證模型與撰寫解答論文。

數學建模競賽結果評比，著重強調研究問題、解決方案的原創性、結果的合理性外，也重視團隊合作及交流。不僅是問題解決的表現，也是合作解決問題的結果。合作問題解決，在數學建模競賽解題歷程中，亦是重要的範疇。

在 21 世紀技能評估與教學中(Assessment and Teaching of 21st Century Skills 簡稱 ATC21S) 提到，隨著問題複雜性增加，問題解決已發展至跨領域統整(Griffin et al., 2012; Griffin & Care, 2015)，因此，合作問題解決 (Collaborative Problem Solving 簡寫為 CPS)逐漸被重視。由於發展學生的合作(strong collaboration)、批判性思考(critical thinking)、資訊科技(information technology)、及問題解決(problem-solving)等能力 (Greiff, Holt, & Funke, 2013; Griffin et al., 2012; O'Neil et al., 2003) 越來越受到教育政策的關注與重視，OECD 的國際學生評量計畫(簡稱 PISA) 從 2015 年開始，除了改為全面電腦化施測外，也發展合作問題解決的評量方式，顯見合作問題解決的重要性。

合作問題解決的定義為：個人能與他人在解決問題過程中合作，以分享知識、技能方式，共同努力解決問題 (OECD,2017)。Roschelle & Teasley (1995)認為合作問題解決是由合作者共同完成任務，每位參與者都要相互協調共同努力，以解決問題的任務要求。隨著科技日益進步，人們面對的問題更加複雜，有許多問題不能單靠一人獨立解決，更需要合作才能完成。

PISA 的 CPS 評量，主要是評量學生的「社交技巧」與「認知能力」，個人在合作問題解決應該具備三種核心能力：(1)建立及維持彼此間的理解；(2)採取適當的行動解決問題；(3)建立及維持團隊合作。問題解決需經過四個階段方能完成，包括(A)探究及理解；(B)表達及有系統地闡述；(C)計畫與執行；(D)監控及反思。三種核心能力與四個階段關係構成合作問題解決評量架構如表 1。

表 1 PISA 2015 合作問題解決評量架構

(Skills evaluated in the PISA 2015 collaborative problem-solving assessment)

問題解決歷程	合作問題解決素養			
		(1)建立及維持相互的理解	(2)採取適當的行動解決問題	(3)建立及維持團隊合作
	(A)探究及理解	(A1)發現團隊成員的觀點與能力	(A2)依據目標發現解決問題的互動形式	(A3)理解解決問題的任務角色
	(B)表達及有系統闡述	(B1)建立共享的表達和整合問題的意義	(B2)辨識與描述要完成的任務	(B3)描述角色與團隊組織
	(C)計畫與執行	(C1)與團隊成員溝通執行的行動	(C2)執行計畫	(C3)遵守參與規則
	(D)監控及反思	(D1)檢核及修正共享的認知	(D2)檢核行動結果與評價解決問題如何成功	(D3)檢核、提供回饋與調整團隊組織及角色

譯自：PISA 2015 Collaborative Problem Solving Framework by OECD, 2017, p.50.

數學建模競賽解題歷程與 PISA 的 CPS 評量問題情境高複雜且具真實性，藉由規劃行動方案、收集資料、執行問題解決、建立決策行動、完成探究歷程以呈現作品。數學建模競賽是學生們共同討論，CPS 評量則是透過電腦與兩位虛擬電腦人員完成討論；數學建模競賽比賽時間 96 小時，CPS 評量中科學、數學、閱讀、合作問題解決等四項共 390 分鐘。

在合作情境中的討論，除了具備相互支持的功能外，當雙方觀點不同時，爲了尋求共識，對於自身觀點的辯護、澄清，可使學生注意到事件與結果的關聯，意識到自己的推理歷程（葉明達，1998）。因此，透過數學建模競賽合作問題解決，能藉由分工合作和溝通分享，進行討論活動，培養學生批判思考能力，學習人際互動所必需的接納、傾聽和尊重。

三、研究方法

本研究的研究方法採用個案研究法，以質性資料為主，針對 15 位個案學生進行觀察，閱讀研究資料後，探討資料與研究關注焦點的相關性，再把初步的資料整理加以分析，以形成本研究的待答問題。本研究同時進行資料蒐集、整理及分析。資料蒐集方式包括，晤談、量表、問卷、錄影、錄音、現場筆記、現場觀察、以及閱讀學生撰寫的解題論文等，運用詮釋性研究法，探討學生參加數學建模競賽的解題建模歷程、態度與思考模式。

兩次數學建模競賽均有兩個題目可以讓參賽者選擇。A、B、C 三組參加 IMMC 2019 中華國際數學建模競賽初賽，A 組解答「培育聊天機器人對談人工智能歷史」，B、C 兩組均解答「在網路遊戲中設置自我控制機制」。

D、E、F 三組參加台灣數學建模與創意學會辦理的全國數學建模競賽，D、E 兩組均選擇觀賞以美國、蘇聯、東德間國際談判為背景的「間諜橋」電影。F 組選擇以美國警方人質救援談判為背景的「王牌對王牌」電影。比賽要求參賽者選擇將正反雙方的談判過程寫成數學模型，然後計算正、反雙方是否為雙贏？或者從正、反雙方的立場計算，是否能取得比電影劇情更大的利益？

四、結論與建議

歸納六組解題歷程，包括選擇題目、進入問題情境、尋找解題關鍵點、尋求適合的數學理論、依題目設定變數與依變數、建立數學模型、數學模型代入問題情境驗證、發展延伸數學模型、修正原有數學模型及上傳解答論文。高中學生參加數學建模競賽的解題歷程圖如圖 5：

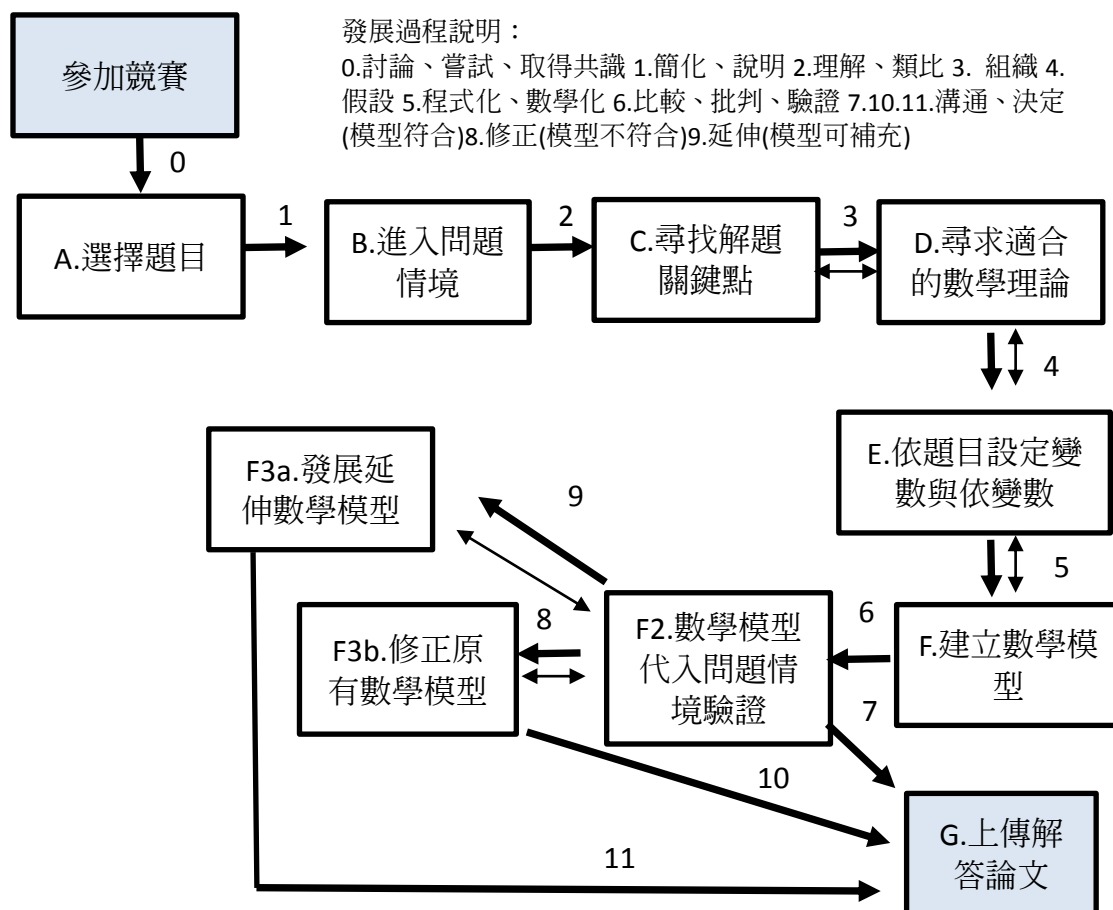


圖 5 高中學生參加數學建模競賽解題歷程圖(研究者自行繪製)

為使高中數學建模競賽更受重視及提升參與意願，本研究提出建議如下：

(一)對於學習者的建議

參加數學建模競賽有助於學生學習數學，不影響學校學習課程，建議高中學生應該踴躍參加數學建模競賽。希望學生進行數學問題的解題，也可嘗試以數學建模方式進行。面對生活問題，試著以數學建模方式提出解決問題的數學模型。

(二)對於教學者的建議

學生在比賽中需要運用數學「統計」與「迴歸分析」，或是資訊、經濟學等更深奧的知識，建議高中教師開設相關多元選修課程及有關論文寫作的課程。

由於其他領域能力在數學建模解決問題非常重要，數學教師可以結合不同領域教師，發展跨域學習的課程如 STEM 課程；和其他領域教師共同研討設計

適合數學建模解題的題組，並在校內辦理類似競賽，讓學生體驗數學與生活的密不可分關係，增進學生學習數學動機。

(三)對於主辦單位的建議

建議主辦單位能集中一個場地辦理，並統一作賽前競賽說明與相關研習，且可提前公布題目。若能集中一個場地辦理，避免不同場地設備及環境條件不同，更具嚴謹性；統一作賽前競賽說明與相關研習，協助參賽者了解競賽方式與數學建模內涵，也能提升參賽作品品質；提前公布題目，有利於學生可以蒐集更多相關書籍或論文，使解題更加完整。

(四)對於大學數學相關學系的建議

建議各大學數學相關學系，可以和其他學系共同為高中生辦理類似相關數學建模競賽，以發掘更多解決實際問題的人才、能應用數學的人才。也可以和高中合作，進行有關數學建模競賽課程的開課與競賽指導等合作。

(五)對於主管行政機關建議

建議主管行政機關，除了在課綱中已加入有關數學模型的單元，未來可以推廣數學建模競賽活動，辦理教師相關研習，提升高中學生以數學建模解決問題的能力。此外，可分成北、中、南、東四區辦理全國初賽，再取優秀作品學生參加決賽，提高學生參加數學建模競賽意願。

(六)對於未來研究的建議

本研究所提出之「學生參加數學建模競賽的解題歷程」屬於初探階段，建議未來研究，可依本研究所提出內容設計實驗，來確認其與實際層面的符合性，並能更深入探討有關數學建模競賽解題歷程的發展。

數學建模競賽是非常有意義的比賽，希望教師及家長能鼓勵更多高中學生參加數學建模競賽；也希望數學教育者投入研發更多適合數學建模競賽解題的題組，推廣數學建模競賽，使數學建模競賽更具公信力及規模性；未來研究者可依據本研究所提出內容進行設計實驗，以更深入探討有關數學建模競賽解題歷程的發展。更期盼有更多優秀人才經由數學建模競賽，使他們的能力被看見與肯定。

參考文獻

一、中文部分

- 王明慧、柳賢、洪振方（2006）。高一學生在解題歷程中的數學建模之分析：以指數單元為例。**屏東教育大學學報**，**24**，271-310。
- 中華國際數學建模挑戰賽委員會(2019)。IMMC 2019 邀請函。取自 http://istem.info/web/news_detail.php?id=104。
- 沈明勳（2013）。應用眼動追蹤技術探討數學解題歷程之表徵轉換模式（未出版之博士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。
- 柯怡君、張靜馨（1995）。以問題為中心的數學教學策略在資優班與普通班實施之比較。**科學教育**，**6**，181-207。
- 馬秀蘭、吳德邦（譯）（2009）。中學數學教學資源手冊－推理與解題導向（原作者：S. Krulik & J. A. Rudnick）。臺北市：心理。（原著出版年：1996）
- 張靜馨（2008）。建模活動的發展及其應用於促進國中生數學能力之研究。行政院國家科學委員會專題研究成果報告（編號：NSC 97-2511-S-018-002-M），未出版。
- 張靜馨（2011）。透過建模活動促進中學數學教師專業成長之研究。行政院國家科學委員會專題研究成果報告（編號：NSC 98-2511-S-018-003-M），未出版。
- 張靜馨（2013）。透過引模活動促進中學數學教師專業發展與中學生數學學習之研究。行政院國家科學委員會專題研究成果報告（編號：NSC 99-3511-S-018-013-MY3），未出版。
- 教育部（2014）。十二年國民基本教育課程綱要總綱。取自 https://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/attach/87/pta_18543_581357_62438.pdf。
- 教育部（2018）。十二年國民基本教育課程綱要（國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域）。取自 https://www.k12ea.gov.tw/files/class_schema/%2F課綱%2F12-數學%2F12-1%2F十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校一數學領域.pdf。
- 梁貫成（2017）。**數學建模教學與評估指南**。中國：上海大學出版社。
- 陳惠茹、柳賢（2008）。從建模觀點探討學生數學解題決策之轉變及其影響因素。**國民教育研究學報**，**21**，135-165。

- 陳香妘(2020)。高中數理資優班學生參加數學建模競賽之解題歷程研究（未出版之博士論文）。國立彰化師範大學，彰化縣。
- 林福來、楊凱琳、陳嘯虎、呂又寧（2003）。透過數學建模活動培養高中生的數學創造力。教育部顧問室創造力教育計畫結案報告，未出版。
- 楊凱琳、楊子鋹（2007）。從數學建模學什麼。教育部高中數學學科中心電子報。取自 <https://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/Ctrl/ePaper/eArticleDetail.aspx?id=b5b88370-e6d9-41b8-bfef-bd57a466cfa5>
- 楊凱琳（2009）。數學建模的評量與教學之研究。行政院國家科學委員會專題研究成果報告（編號：NSC 95-2521-S-003-012-MY3），未出版。
- 葉明達（1998）。高一學生數學合作解題與後設認知行為（未出版之碩士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。
- 蕭志如、邱文齡（2002）。數學建模應用於談判理論教材與教法之研究。行政院國家科學委員會專題研究成果報告（編號：NSC 99-2511-S-031-001），未出版。
- 蕭志如、邱文齡（2015）。科普活動：2014 年中等學校數學建模競賽。行政院國家科學委員會專題研究成果報告（編號：MOST 103-2515-S-031-001），未出版。
- 蕭志如、邱文齡（2018）。科普活動：第十七屆全國數學建模競賽及國際 MCM 競賽研習計畫（期中報告）。行政院國家科學委員會專題研究成果報告（編號：MOST 107-2515-S-031-001），未出版。

二、英文部分

- Bliss, K. M., Fowler, K. R., & Galluzzo, B. J. (2014). *Math modeling- getting started & getting solutions*. Retrieved from <https://m3challenge.siam.org/sites/default/files/uploads/siam-guidebook-final-press.pdf>.
- Bliss, K., Fowler, K., Galluzzo, B., Garfunkel, S., Giordano, F., Godbold, L., ... Zbiek, R. (2016). Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education. Consortium for Mathematics and Its Applications and the Society for Industrial and Applied Mathematics. Retrieved August 23, 2020 from <http://www.siam.org/reports/gaimme.php>.
- Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. In T. Breiteig, I. Huntley & G. Kaiser-Messmer (Eds.), *Teaching and learning mathematics in context* (pp. 3-14). Chichester, England: Ellis Horwood.

- Blum, W. & Leiß, D. (2006). "Filling up" – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In Bosch, M. (Ed.), *CERME 4– Proceedings of the fourth conference of the European Society for Research in mathematics education* (pp. 1623-1633). Guixol, Spain.
- Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? In Haines, C. et al. (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA12) - Education, engineering and economics* (pp. 222-231). Cambridge, England: Ellis Harwood Ltd.
- Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Dewey, J. (1910). *How We Think*. Lexington, MA: D.C. Heath and Company.
- Greiff, S., Wüstenberg, S., & Funke, J. (2012). Dynamic problem solving: A new assessment perspective. *Applied Psychological Measurement*, 36(3), 189-213.
- Greiff, S., Holt, D. V., & Funke, J. (2013). Perspectives on Problem Solving in Educational Assessment: Analytical, Interactive, and Collaborative Problem Solving. *The Journal of Problem Solving*, 5(2), 71-91.
- Kehle, P. E. & Lester, F. K. (2003). A semiotic look at modeling behavior. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 97-122). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Krulik, S. & Rudnick, J. A. (1996). *The new sourcebook for teaching reasoning and problem solving in junior and senior high schools*. Boston, MA: Allyn and Bacon.
- Mason, J. & Davis, D. (1991). *Modeling with mathematics in primary and secondary Schools*. Sydney, Australia: Deakin University Press.
- Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. New York, NY: Freeman.
- Niss, M. (1989). Aims and Scope of Applications and Modelling in Mathematics Curricula. In Blum W. et al. (Eds.) *Applications and Modelling in Teaching Mathematics* (pp. 22-31). Chichester, England: Ellis Horwood.
- PISA 2015 Results (Volume V) - Collaborative Problem Solving. (2017, November 21). Retrieved from <http://www.oecd.org/education/pisa-2015-results-volume-v-9789264285521-en.htm>

- Polya, G. (1945). *How to solve it: a new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Richard, L. & Helen M., D. (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Roschelle, J. & Teasley, S. D. (1995). The construction of shared knowledge in collaborative problem solving. In C. E. O'Malley (Ed.), *Computer-Supported Collaborative Learning* (pp. 69-197). Berlin, Germany: Springer-Verlag. doi:10.1007/978-3-642-85098-1_5
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Stillman, G., Galbraith, P., & Brown, J. (2007). A Framework for Success in Implementing Mathematical Modelling in the Secondary Classroom. *Mathematics: Essential Research, Essential Practice*, 2, 688-697.
- Swetz, F. & Hartzler, J.S. (1991). *Mathematical modeling in the secondary school curriculum*. Reston, VA: NCTM, Inc.